Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

MATEMATICA SUPERIOR - 2do Parcial (26 de noviembre de 2013)

Tema: 30

1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	Nota Final
1 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1 p.	1 p.	

Para aprobar es necesario sumar por lo menos 6 p. Nota: n = p - 2. TIEMPO MAXIMO: 120 minutos

Ejercicio 1: Dada la ecuación: $e^x - 2 - x^3 = 0$ indique Verdadero o Falso, justificando:

1.1) La función dada tiene una única raíz real en el intervalo [-2;-1]

1.2) Para hallar la raíz del intervalo [-2;-1] es posible usar la función $g(x) = \sqrt[3]{(e^x - 2)}$ por **Punto Fijo.**

1.3) Partiendo de $x_0 = 0$ por Newton-Raphson converge a una raíz.

Ejercicio 2:

Dados los siguientes puntos:

x	-1	0	2	3	5	6
y	-1	5	11	k	95	167

2.1) Halle el valor de $k \in R$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3.

2.2) ¿Es posible hallar $k \in R$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 4? **Justifique.**

2.3) Elija tres puntos convenientes para poder estimar la derivada segunda en x=2 utilizando **la fórmula** central y calcule dicha aproximación.

Ejercicio 3:

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -2x + 5y + z = 9 \\ 2x + 3y - 7z = -12 \\ 6x - y + 2z = 15 \end{cases}$

3.1) Escriba la matriz de coeficientes. Halle la norma 1 y la norma infinito.

3.2) Reordene las ecuaciones y resuélvalo por Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (4;2;3)$ con error $< 10^{-4}$

Ejercicio 4:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando:

4.1) La ventaja principal de utilizar polinomios de Legendre para aproximar una función en **un intervalo** dado es que se resuelven integrales más sencillas que las requeridas por el ~~otro~~ método.

4.2) NO es posible resolver $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{x} dx$ con h=0.08 por Simpson pero sí se puede **resolver por** Trapecios.

4.3) Al resolver la integral anterior por Trapecios con cualquier h válido, se obtiene un **valor MENOR al** exacto.

RESPUESTAS PARCIAL 2 TEMA 30

Ejercicio 1:

1.1) FALSO. Graficando $e^x - 2 = x^3$ observamos que tiene 2 raíces: [-2 ; -1] y [4; 5]

1.2) VERDADERO. $g'(x) < 1$ en [-2 ; -1] entonces el método es convergente

1.3) FALSO. Tomando $x_0 = 0$ el método OSCILA entre 0 y 1

x	f(x)	f'(x)
0	-1	1
1	e - 3	e – 3
0	-1	1
1	e - 3	e – 3

Ejercicio 2: **2.1)** Haciendo las diferencias divididas:

-1	-1				
0	5	6			
2	11	3	-1		
5	95	28	5	1	
6	167	72	11	1	0

$P(x) = -1 + 6\,(x+1) - 1\,(x+1)\,x + 1\,(x+1)\,x\,(x-2) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$

$P(3) = 23 \Rightarrow k = 23$

2.2) No es posible que pase un polinomio de grado 4, ya que por los 5 puntos que no dependen de k, no pasa ninguno de dicho grado.

2.3) Elijo tres puntos equiespaciados: -1, 2 y 5. $f''(2) = [(-1)-2*11+95]/3^2 = 8$

Ejercicio 3:

3.1) La matriz A tiene norma 1 = 10 y norma infinito = 12

3.2)

x	y	z
4	2	3
1,83333333	1,93333333	3,06666667
1,8	1,90666667	3,04571429
1,80253968	1,91187302	3,0486712
1,80242177	1,91123447	3,04836385
1,8024178	1,91129435	3,04838838

Ejercicio 4: **4.1)** La ventaja principal es que no se resuelve sistema de ecuaciones, y además son menos integrales y en un intervalo simétrico.

4.2) FALSO. Con $h = 0.08 \Rightarrow n = 37.5$ NO se puede por ninguno de los dos métodos

4.3) VERDADERO. Calculamos las derivadas: $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ $f''(x) = \dfrac{-3+2\ln(x)}{x^3}$

Como $f''(x) < 0$ en [1;4] entonces Trapecio devuelve un valor MENOR al exacto.

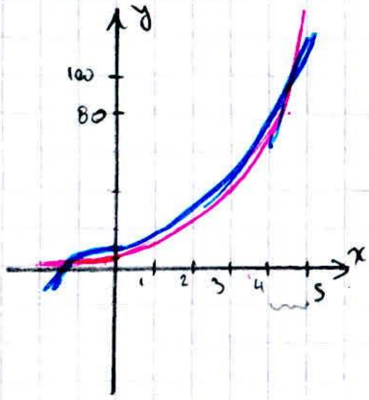
tema 30

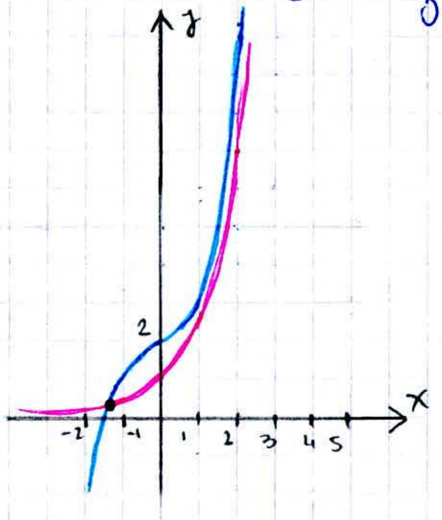
Mat. Sup 2° parcial 26-11-13

① Dada la ecuación $e^x - 2 - x^3 = 0$ indique V o F, justificando:

a) La función dada tiene una única raíz real en el intervalo $[-2;-1]$

$e^x = \underbrace{x^3 + 2}$





tiene 2 raíces:

1 en $[-2;-1]$

1 en $[4;5]$

$\boxed{F}$

b) Para hallar la raíz del intervalo $[-2;-1]$ es posible usar la función $g(x) = \sqrt[3]{e^x - 2}$ por Punto Fijo.

$g'(x) = \frac{1}{3}(e^x - 2)^{-2/3} \cdot e^x = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x-2)^2}} = g'(x)$; $\forall x \in [-2;-1]$ $|g'(x)| < 1$ ∴ converge $\boxed{V}$

$e^x - 2 = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{e^x - 2}$ / si tomo $g(x) = x$ se puede utilizar

c) Partiendo de $X_0 = 0$ por Newton Raphson converge a una raíz.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\qquad f(x) = e^x - 2 - x^3 \qquad f'(x) = e^x - 3x^2$ $\qquad \boxed{F}$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$ es cíclico y $\nexists$ en $[0;1]$

---

② Dados los siguientes puntos

x	-1	0	2	3	5	6
y	-1	5	11	k	95	167

a) Halle el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3.

x_i	$f x_i$	Δ^1	Δ^2	
-1	-1			
		$\frac{6}{1} = 6$		
0	5		$\frac{-3}{3} = -1$	
		$\frac{6}{2} = 3$		$\frac{6}{6} = 1$
2	11		$\frac{25}{5} = 5$	
		$\frac{84}{3} = 28$		
5	95			

$P(x) = -1 + 6(x+1) - \overbrace{(x+1)x}^{(x^2+x)} + \overbrace{(x+1)x(x-2)}^{x^3 - x^2 - 2x}$

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$

$P(-1) = -1$, $P(0) = 5$, $P(2) = 11$,

$P(5) = 95$, $P(6) = 167$

Se verifica que $P(x)$ cumple en todos los puntos ∴ $\rightarrow P(3) = \boxed{k = 23}$

b) ¿Es posible hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 4? Justifique.

No. Para $k = 23$, el polinomio interpolante de menor grado es de grado 3, por lo que, si $k \neq 23$, el polinomio interpolante será de grado completo $\rightarrow$ grado 5.

c) Elija tres puntos convenientes para estimar la derivada segunda en $x = 2$ utilizando la fórmula central y calcule dicha aproximación.

Para utilizar la fórmula central, voy a utilizar otros dos puntos equiespaciados $\rightarrow$ $x = -1$ y $x = 5$

$$f''(2) = \frac{f(5) - 2f(2) + f(-1)}{h^2} = \frac{95 - 2 \times 11 + (-1)}{3^2} = \boxed{8 = f''(2)}$$

---

③ Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -2x + 5y + z = 9 \\ 2x + 3y - 7z = -12 \\ 6x - y + 2z = 15 \end{cases}$

a) Escriba la matriz de coeficientes. Halle la norma 1 y la norma ∞

$$M(A) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Sigma|c_1| = 10$ $\Sigma|c_2| = 9$ $\Sigma|c_3| = 10$

$\Sigma|f_1| = 8$
$\Sigma|f_2| = 12$
$\Sigma|f_3| = 9$

$\rightarrow \|A\|_1 = 10$

$\|A\|_\infty = 12$

b) Reordene las ecuaciones y resuélvalo por Gauss-Seidel partiendo de $X_0 = (4; 2; 3)$ con error $< 10^{-4}$

$$\begin{cases} 6x - y + 2z = 15 \\ -2x + 5y + z = 9 \\ -2x - 3y + 7z = 12 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{aligned} x^k &= \frac{15 + y^{k-1} - 2z^{k-1}}{6} \\ y^k &= \frac{9 + 2x^k - z^{k-1}}{5} \\ z^k &= \frac{12 + 2x^k + 3y^k}{7} \end{aligned}\right\} \text{Fórmulas iterativas}$$

				$\lVert X_i - X_{i-1} \rVert_\infty$
$x_0 =$	(4	; 2	; 3)	
$x_1 =$	(1,833333	; 1,933333	; 3,066666)	2,166
$x_2 =$	(1,8	; 1,9066666	; 3,04571429)	0,03
$x_3 =$	(1,80253968	; 1,91187301	; 3,0486712)	0,00520...
$x_4 =$	(1,80242177	; 1,91123447	; 3,04836385)	0,00063854
$x_5 =$	(1,8024178	; 1,91129435	; 3,04838838)	$5,99 \times 10^{-5}$

26-11-13

(4) Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones, justificando:

a) La ventaja principal de utilizar polinomios de Legendre para aproximar una función en un intervalo dado es que se resuelven integrales más sencillas que las requeridas por el otro método.

$\boxed{F}$ La ventaja principal es que no se resuelve sistema de ecuaciones y, además, son menos integral y en un intervalo simétrico.

b) No es posible resolver $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ con $h=0{,}08$ por Simpson pero sí se puede resolver por trapecios.

$mh = b-a \rightarrow m = \frac{3}{0{,}08} = 37{,}5$ $\boxed{F}$ no se puede resolver con ninguno de los dos métodos

c) Al resolver la integral anterior por trapecios con cualquier h válido se obtiene un valor MENOR al exacto

$$E_T = \frac{a-b}{12} h^2 f''\varphi = -\frac{3}{12} h^2 f''\varphi = -\frac{1}{4} h^2 f''\varphi$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{-x-(1-\ln(x))2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln(x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-3x+2x\ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}\,(2\ln(x)-3)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \underbrace{\frac{2\ln(x)-3}{x^3} = f''(x)}_{<0\ \forall x \in [1;4]}$$

$$E_T = \overbrace{-\frac{1}{4}}^{<0}\,\overbrace{h^2}^{>0}\,\overbrace{f''\varphi}^{<0} \quad \therefore E_T < 0 \ \forall x \in [1;4]$$

$$\rightarrow \underbrace{A < I}_{} \rightarrow \boxed{V}$$

El valor de A x trapecios es mayor al exacto